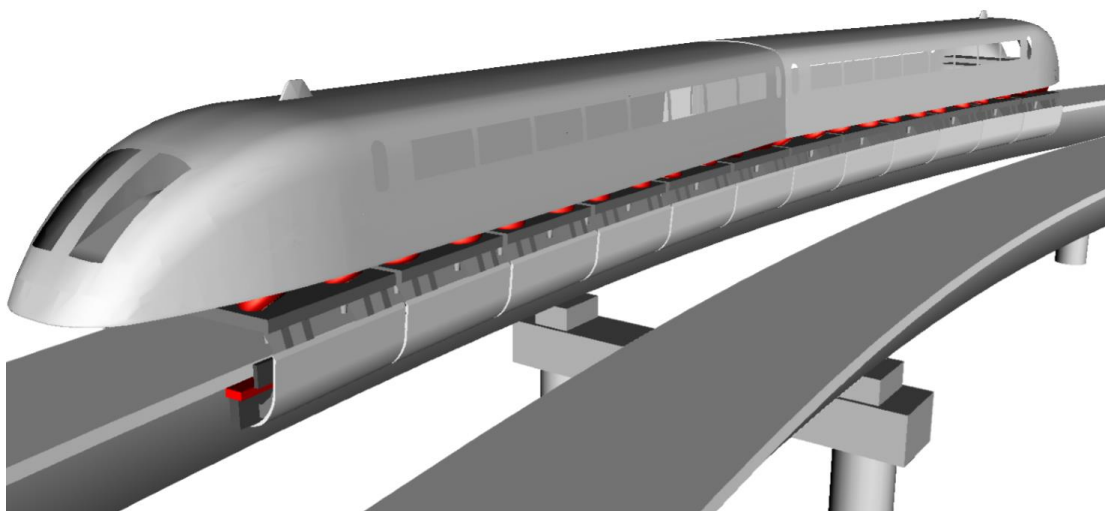


# UM Maglev 模块里的几种磁浮控制模型



本文内容源自 UM 软件用户手册第 29 章，因译者学识和水平有限，难免有错误之处，恳请读者批评指正。

请注意：UM Maglev 早期的用户手册及本文参考文献中有笔误之处，本文已将其修正，且推导过程比用户手册更为详细。

## 1 弹簧-阻尼控制模型

弹簧-阻尼控制模型是一种最简单的线性化磁浮控制模型，它忽略了控制器效应，常用于计算磁浮车辆系统的固有频率和特征值，这在模型初始调试阶段非常有用。

磁浮力的计算公式如下：

$$F = F_0 + k_p(S - S_0) + c_p\dot{S} \quad (1)$$

式中， $F_0$  是额定磁浮力， $S_0$  是额定气隙， $S$  是当前时刻的气隙， $k_p$  是刚度系数（位移反馈）， $c_p$  是阻尼系数（速度反馈）。

## 2 单极电磁铁控制模型

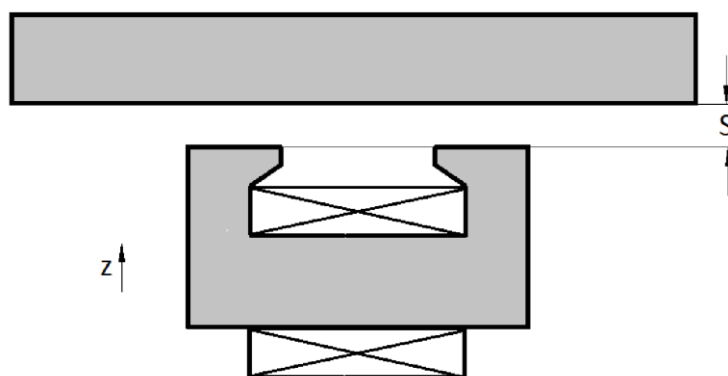


图 1 单极电磁铁

磁浮交通领域的学者在进行磁浮车辆动力学仿真研究时大多采用一种单极电磁铁模型，其电磁力计算公式如下：

$$F = \kappa \left( \frac{I}{S} \right)^2 \quad (2)$$

式中， $I$  是电流， $S$  是气隙（悬浮或导向）， $\kappa$  是电磁铁常数，其计算公式为：

$$\kappa = \frac{\mu_0 A N^2}{4} \quad (3)$$

式中， $A$  是磁极面积， $N$  是电磁铁线圈匝数， $\mu_0$  是真空磁导率。

根据基尔霍夫电压定律，可得单极电磁铁回路的电压方程如下：

$$\frac{d(LI)}{dt} = -RI + U \quad (4)$$

即

$$L\dot{I} + \dot{L}I = -RI + U \quad (5)$$

式中， $R$  是电阻， $U$  是电压， $L$  是电感，电感  $L$  与气隙  $S$  和电磁铁常数  $\kappa$  相关，表示如下：

$$L = \frac{2\kappa}{S} \quad (6)$$

故有

$$\dot{L}S + L\dot{S} = 0 \quad (7)$$

即

$$\dot{L} = -\frac{L\dot{S}}{S} \quad (8)$$

将式(8)代入式(5)，可得微分方程

$$L\dot{I} = -RI + \frac{LI}{S}\dot{S} + U \quad (9)$$

我们先来考虑稳态的情况，令  $F_0$  为额定电磁力， $S_0$  为额定气隙，可得额定电流  $I_0$ ，额定电压  $U_0$  和额定电感  $L_0$  如下：

$$I_0 = S_0 \sqrt{\frac{F_0}{\kappa}} \quad (10)$$

$$U_0 = RI_0 \quad (11)$$

$$L_0 = \frac{2\kappa}{S_0} \quad (12)$$

考虑位移、速度和加速度反馈的 PID（比例-积分-微分）电压控制模型为：

$$\begin{cases} U = U^0 + U_s \Delta S + U_v \dot{S} + U_{is} \int_0^t \Delta S dt - U_a \ddot{Z} \\ \Delta S = S - S_0 \end{cases} \quad (13)$$

由图 1 可知，电磁铁的坐标  $Z$  增量方向与气隙  $S$  增量方向相反。若不考虑积分环节，则  $U_{is} = 0$ ，初始电压与额定电压相等， $U^0 = U_0 = RI_0$ 。

将式(9)代入式(13)，可得

$$Li = -RI + U^0 + U_s \Delta S + (U_v + LI/S) \dot{S} + U_{is} \int_0^t \Delta S dt - U_a \ddot{Z} \quad (14)$$

因此，控制系统的参数为：  $F_0$ ,  $S_0$ ,  $\kappa$ ,  $R$ ,  $U_0$ ,  $U_s$ ,  $U_v$ ,  $U_{is}$ ,  $U_a$ 。

该模型可用于常导高速磁浮列车的悬浮和导向控制，当然参数可能取值不同。

### 3 U 形电磁铁控制模型

一种 U 形电磁铁常用于常导中低速磁浮交通，与高速磁浮不同的是，其横向采用被动控制（无独立的导向电磁铁），当车辆和轨道有相对横移时，磁浮力会产生一个横向分力，实现自动导向。

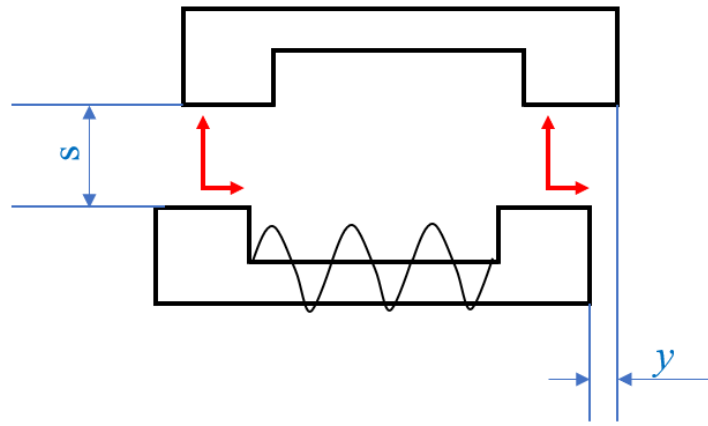


图 2 U 形电磁铁

UM Maglev 模块提供了两种 U 形电磁铁控制模型：模型 A 和模型 B。

#### 3.1 模型 A

悬浮（垂向）力计算公式

$$F_z = F \left( 1 + \frac{2S}{\pi W_m} - \frac{2y}{\pi W_m} \arctan \frac{y}{S} \right) \quad (15)$$

导向（横向）力计算公式

$$F_y = F \frac{2S}{\pi W_m} \arctan \frac{y}{S} \quad (16)$$

其中， $F$  也通过式(2)计算得到， $y$  是相对横移量， $W_m$  是磁极宽度。

这里，我们可以引入一个系数

$$\lambda_A = \frac{2S_0}{\pi W_m} \quad (17)$$

则式(16)可以表示为

$$F_y = F \lambda_A \frac{S}{S_0} \arctan \frac{y}{S} = F \psi_A(y, S, S_0) \quad (18)$$

式(15)可以表示为

$$F_z = F \left( 1 + \lambda_A \frac{S}{S_0} - \lambda_A \frac{y}{S_0} \arctan \frac{y}{S} \right) = F \left( 1 + \lambda_A \frac{S}{S_0} \right) - F_y \frac{y}{S} \quad (19)$$

特别地，若  $\lambda_A = 0$ ，则  $F_y = 0$ ， $F_z = F$ ，与式(2)吻合。

### 3.2 模型 B

悬浮（垂向）力计算公式

$$F_z = \frac{1}{4} N^2 \mu_0 l I^2 \left( \frac{W_m - y}{S^2} + \frac{4y}{4S^2 + \pi y S} \right) \quad (20)$$

导向（横向）力计算公式

$$F_y = \frac{1}{4} N^2 \mu_0 l I^2 \left( \frac{1}{S} - \frac{4}{4S + \pi y} \right) \quad (21)$$

其中， $l$  是磁极长度，其余符号与前文的定义相同。

将式(21)代入式(20)可得

$$F_z = \frac{1}{4} N^2 \mu_0 l W_m \left( \frac{l}{S} \right)^2 - F_y \frac{y}{S} \quad (22)$$

在式(21)中引入参数磁极宽度  $W_m$  和额定气隙  $S_0$ ，即乘以  $W_m S_0 / W_m S_0$ ，可得

$$F_y = \frac{1}{4} N^2 \mu_0 l W_m \left( \frac{l}{S} \right)^2 \frac{\pi S_0}{4 W_m} \frac{1}{\left( 1 + \frac{\pi y}{4S} \right)} \frac{y}{S_0} \quad (23)$$

又由磁极面积为

$$A = l W_m \quad (24)$$

将式(24)代入式(3)

$$\kappa = \frac{\mu_0 l W_m N^2}{4} \quad (25)$$

将式(25)代入式(2)

$$F = \frac{\mu_0 l W_m N^2}{4} \left( \frac{l}{S} \right)^2 \quad (26)$$

定义系数

$$\lambda_B = \frac{\pi S_0}{4 W_m} = \frac{\pi^2}{8} \lambda_A \quad (27)$$

将式(26)和(27)代入式(22)

$$F_z = F - F_y \frac{y}{S} \quad (22)$$

将式(26)和(27)代入式(23)

$$F_y = F \lambda_B \frac{1}{\left( 1 + \frac{\pi y}{4S} \right)} \frac{y}{S_0} = F \psi_B(y, S, S_0) \quad (29)$$

在 UM Maglev 仿真界面，有 Model A 和 Model B 两个选项可供用户选择使用。

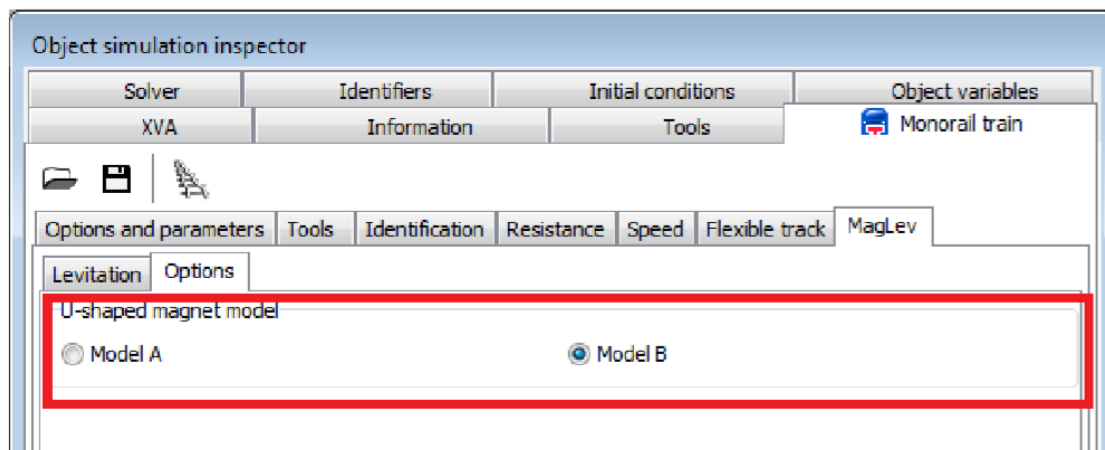


图 3 选择 U 形电磁铁模型

用户使用时需要指定相应的横向力比例系数 ( $\lambda_A$ 、 $\lambda_B$ )。

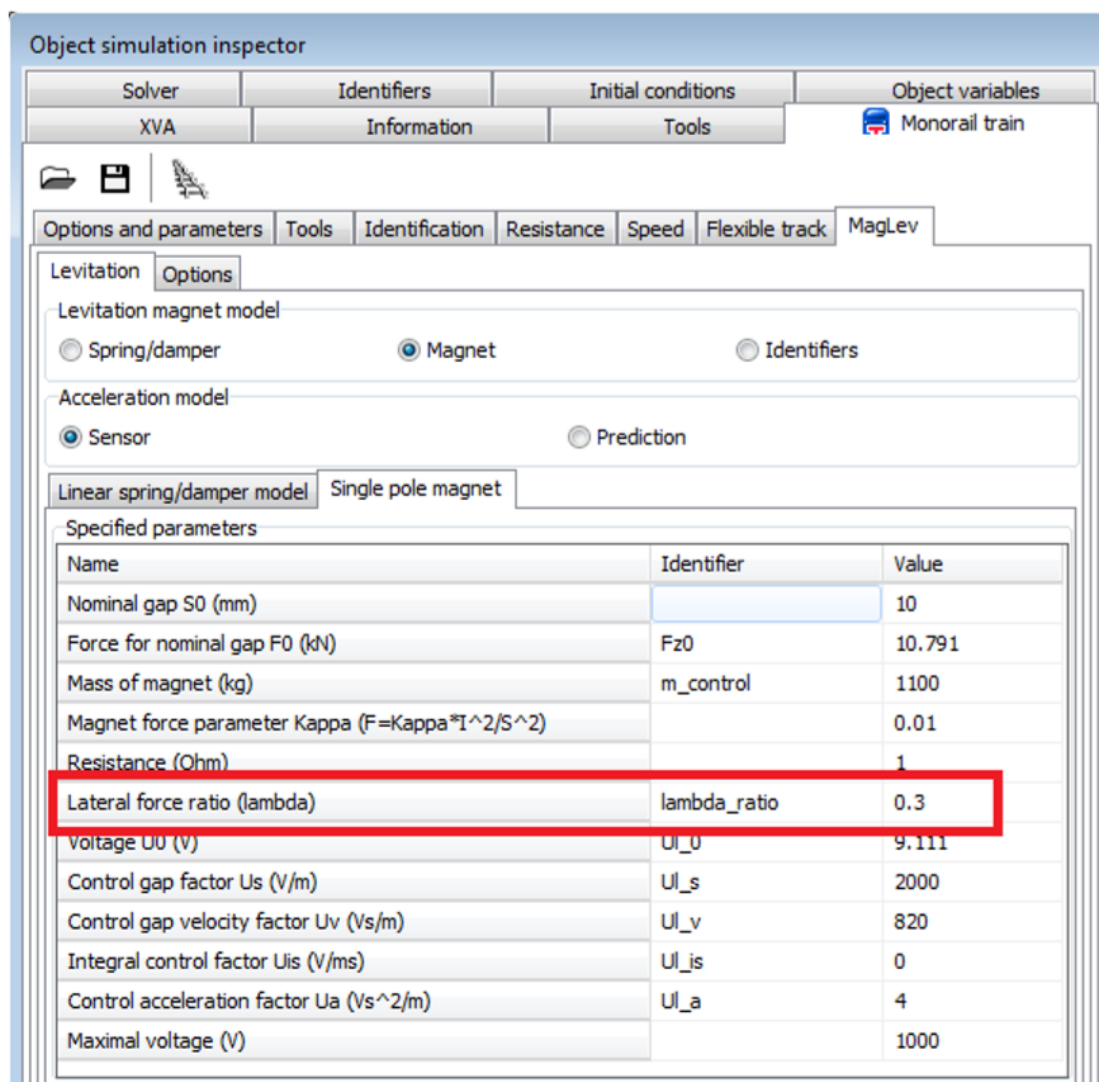


图 4 设置横向力系数 $\lambda_A(\lambda_B)$

令  $S = S_0 = 8\text{mm}$ ,  $\lambda_A = 0.3$ ,  $\lambda_B = \lambda_A$ ,  $\lambda_B = 1.234\lambda_A$ , 对比模型 A 和模型 B 三种工况时函数  $\psi(y, S, S_0)$  的结果, 如图 5 所示。由式(18)和式(29)可知, 当  $F$  确定时, 函数  $\psi(y, S, S_0)$  决定了横向力的大小。

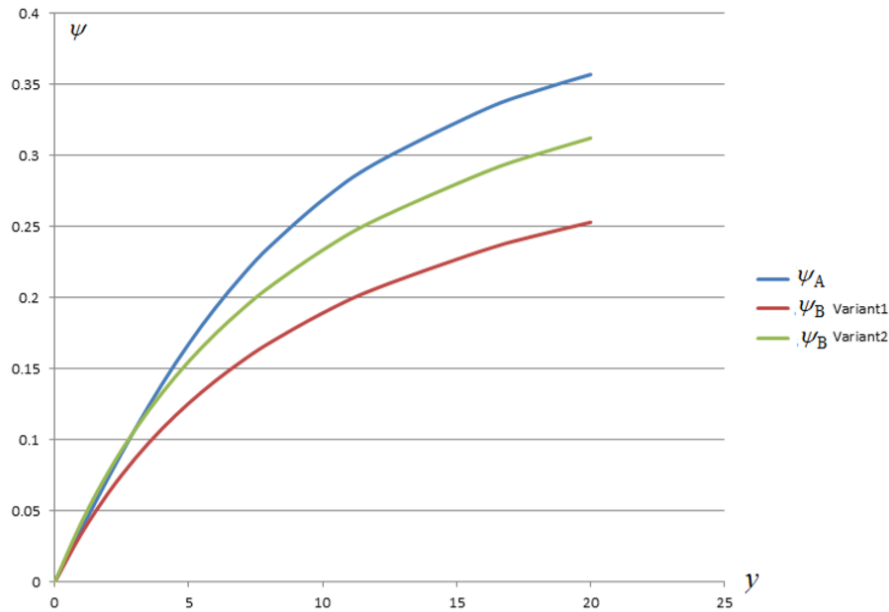


图 5 模型 A 和模型 B 工况对比

由式(17)和式(27)可知, 当额定气隙和磁极宽度确定时, 系数  $\lambda_B$  约为  $\lambda_A$  的 1.234 倍, 由图 5 可以看出, 在相对横移量较小时( $<5\text{mm}$ ), 二者对应的横向力非常接近, 当相对横移量大于 5mm 后, 二者对应的横向力差异逐渐增大。

#### 4 外部控制模型

除了上述自带的磁浮控制模型, UM 软件还支持用户自定义控制模型。自定义控制系统输出的磁浮力通过建模时定义参数符号(如图 6 中的 `fy_gmagnet_lf`)传递给车辆系统, 因此要求每个磁浮力对应不同的参数符号(唯一性)。请注意, 磁浮力的方向始终跟随轨道坐标系。

Force identifiers

Force:

fy\_gmagnet\_lf

Torque:

图 6 参数化建模

- **Identifier control**

使用 UM 的参数符号控制功能，可以实现类似刚度-阻尼控制模型的简化模型，在用户手册第 29 章有详细介绍。

- **Interface to Matlab/Simulink**

采用 UM 提供的 Matlab/Simulink 控制系统接口，既可以将 Matlab/Simulink 编制的复杂控制系统编译为动态链接库，导入 UM 与机械系统建立连接，也可以将 UM 动力学模型输出以 S 函数形式链接到 Matlab/Simulink，便于实现与第三方软件的联合仿真（Cosimulation）。

- **Block Editor**

Block Editor 是 UM 自己开发的一个类似 Matlab/Simulink 的控制系统建模工具，无需编译动态链接库，用户操作更加简便。

- **Programming in control files**

理论上任意复杂的力元都可以通过 UM 的编程功能（二次开发）实现，详见用户手册第 5 章。

## 5 磁浮控制系统稳定性分析

考虑如图 1 所示的一个单自由度的单极电磁铁模型，我们从理论上来分析其稳定性，若不计积分环节，则系统方程为：

$$L\dot{I} = -RI + U^0 + U_s\Delta S + (U_v + LI/S)\dot{S} - U_a\ddot{Z} \quad (30)$$

根据牛顿第二定律，得其运动方程如下：

$$m\ddot{Z} = -F_0 + \kappa \left(\frac{I}{S}\right)^2 \quad (31)$$

式中  $m$  为电磁铁质量。

定义两个无量纲的变量

$$i = \frac{I - I_0}{I_0} \quad (32)$$

$$s = \frac{S - S_0}{S_0} = -\frac{Z - Z_0}{S_0} \quad (33)$$

因此，可得

$$I = I_0(1 + i) \quad (34)$$

$$S = S_0(1 + s) \quad (35)$$

$$\dot{I} = I_0\dot{i} \quad (36)$$

$$\dot{S} = S_0\dot{s} \quad (37)$$

$$\ddot{Z} = -S_0\ddot{s} \quad (38)$$

将式(34)，式(35) 和式(38)代入式(31)，可得

$$mS_0\ddot{s} = F_0 - \kappa \left(\frac{I_0}{S_0}\right)^2 \left(\frac{1+i}{1+s}\right)^2 = -F_0 \left(\frac{1+i}{1+s}\right)^2 + F_0 \quad (39)$$

由式(6)和式(35)，可得

$$L = \frac{L_0 S_0}{S} = \frac{L_0}{1+s} \quad (40)$$

将式(34)-(38)和式(40)代入式(30)，可得

$$\frac{L_0}{1+s} I_0 \dot{i} = -R I_0 (1+i) + U_0 + U_s S_0 s + \left( U_v + \frac{L_0 I_0 (1+i)}{S_0 (1+s)(1+s)} \right) S_0 \dot{s} + U_a S_0 \ddot{s} \quad (41)$$

整理式(39)可得

$$m S_0 \ddot{s} = F_0 \left( 1 - \left( \frac{1+i}{1+s} \right)^2 \right) = F_0 \frac{s^2 + 2s - i^2 - 2i}{(1+s)^2} \quad (42)$$

当变量  $i$  和  $s$  都很小时，略去  $s^2$ ， $i^2$  和  $(1+s)^2$ ，将式(42)线性化，可得

$$\frac{m S_0}{2 F_0} \ddot{s} = s - i \quad (43)$$

在式(41)中消去一个  $(1+i)/(1+s)$ ，可得

$$\frac{L_0}{1+s} I_0 \dot{i} = -R I_0 (1+i) + U_0 + U_s S_0 s + \left( U_v S_0 + \frac{L_0 I_0}{1+s} \right) \dot{s} + U_a S_0 \ddot{s} \quad (44)$$

等式两边同除以  $U_0 = I_0 R$ ，整理可得

$$\frac{L_0}{(1+s)R} \dot{i} = -i + \frac{U_s S_0 s}{U_0} + \left( \frac{U_v S_0}{U_0} + \frac{L_0}{(1+s)R} \right) \dot{s} + \frac{U_a S_0}{U_0} \ddot{s} \quad (45)$$

再略掉  $(1+s)$ ，可得线性化方程

$$\frac{L_0}{R} \dot{i} = -i + \frac{U_s S_0}{U_0} s + \left( \frac{U_v S_0}{U_0} + \frac{L_0}{R} \right) \dot{s} + \frac{U_a S_0}{U_0} \ddot{s} \quad (46)$$

定义两个时间常数

$$T = \sqrt{\frac{m S_0}{2 F_0}} \quad (47)$$

$$T_i = \frac{L_0}{R} \quad (48)$$

再定义三个无量纲的控制系数

$$k_s = \frac{U_s S_0}{U_0} \quad (49)$$

$$k_v = \frac{U_v S_0}{U_0 T} \quad (50)$$

$$k_a = \frac{U_a S_0}{U_0 T^2} \quad (51)$$

把式(47)代入式(43)，可得

$$T^2 \ddot{s} = s - i \quad (52)$$

把式(47)-(51)代入式(46)，可得

$$T_i \dot{i} = -i + k_s s + (k_v T + T_i) \dot{s} + k_a T^2 \ddot{s} \quad (53)$$

联立方程(52)和(53)，可假设其解的形式为

$$s = c_s e^{\lambda t}, \quad i = c_i e^{\lambda t} \quad (54)$$

写成矩阵形式



$$\begin{pmatrix} T^2\lambda^2 - 1 & 1 \\ -k_a T^2\lambda^2 - (k_v T + T_i)\lambda - k_s & T_i + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_s \\ c_i \end{pmatrix} = 0 \quad (55)$$

若方程组有非零解，则行列式为 0，即

$$(T^2\lambda^2 - 1)(T_i + 1) - (-k_a T^2\lambda^2 - (k_v T + T_i)\lambda - k_s) = 0 \quad (56)$$

整理可得

$$T^2 T_i \lambda^3 + T^2(1 + k_a)\lambda^2 + k_v T \lambda + k_s - 1 = 0 \quad (57)$$

再令

$$a_0 = T^2 T_i \quad (58)$$

$$a_1 = T^2(1 + k_a) \quad (59)$$

$$a_2 = k_v T \quad (60)$$

$$a_3 = k_s - 1 \quad (61)$$

形成霍尔维茨矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

其稳定性条件为

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad a_3 > 0 \quad (62)$$

即

$$T^2(1 + k_a)k_v T - T^2 T_i(k_s - 1) > 0, \quad k_s - 1 > 0 \quad (63)$$

整理可得

$$k_s > 1, k_v > \frac{T_i(k_s - 1)}{T(1 + k_a)} = k_v^*, k_a > -1 \quad (64)$$

将式(64)代入式(49)-式(51)，可得控制系统稳定条件为

$$U_s > U_s^* = \frac{U_0}{S_0}, U_v > U_v^* = \frac{U_0 T k_v^*}{S_0}, U_a > -U_a^* = -\frac{U_0 T^2}{S_0} \quad (65)$$

由式(65)可知，比例环节和微分环节是系统稳定的必要条件，增大比例控制系数 $U_s$ 的同时，微分控制系数 $U_v$ 也相应增加。如果考虑加速度反馈控制( $U_a > 0$ )，则可减小微分控制系数。用户可以既通过 UM 提供的线性分析工具（图 7）求解根轨迹来评估控制参数的稳定性，亦可以通过时域仿真（图 8）观察系统的动态响应来判定。

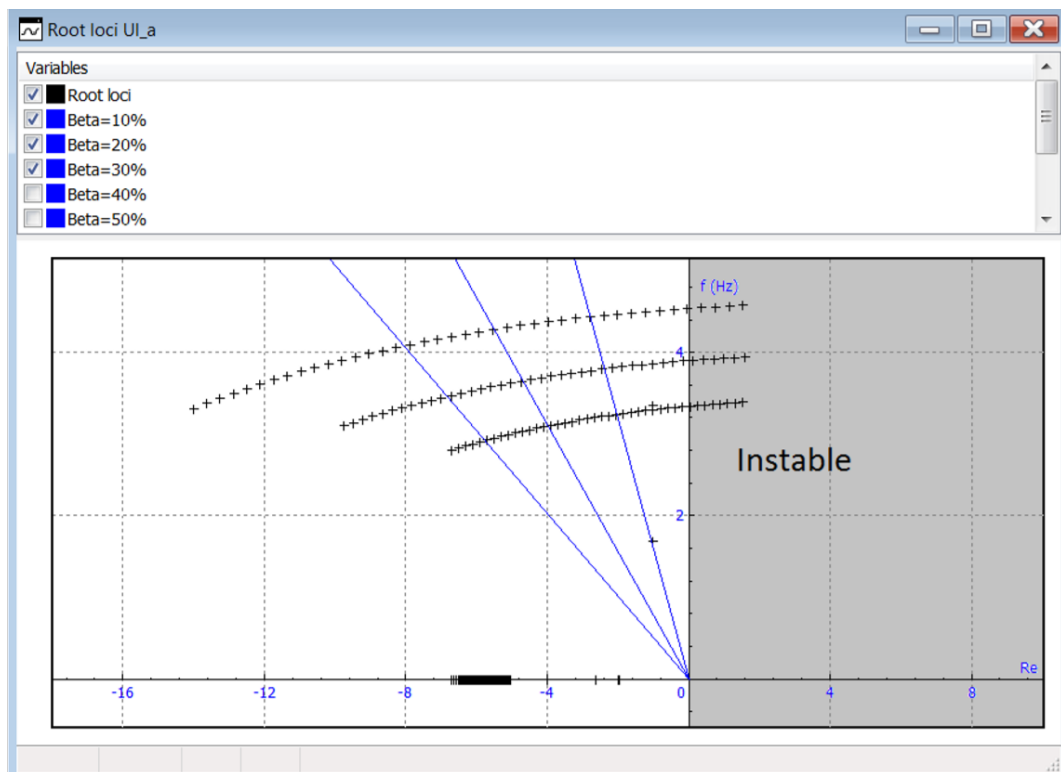


图 7 根轨迹

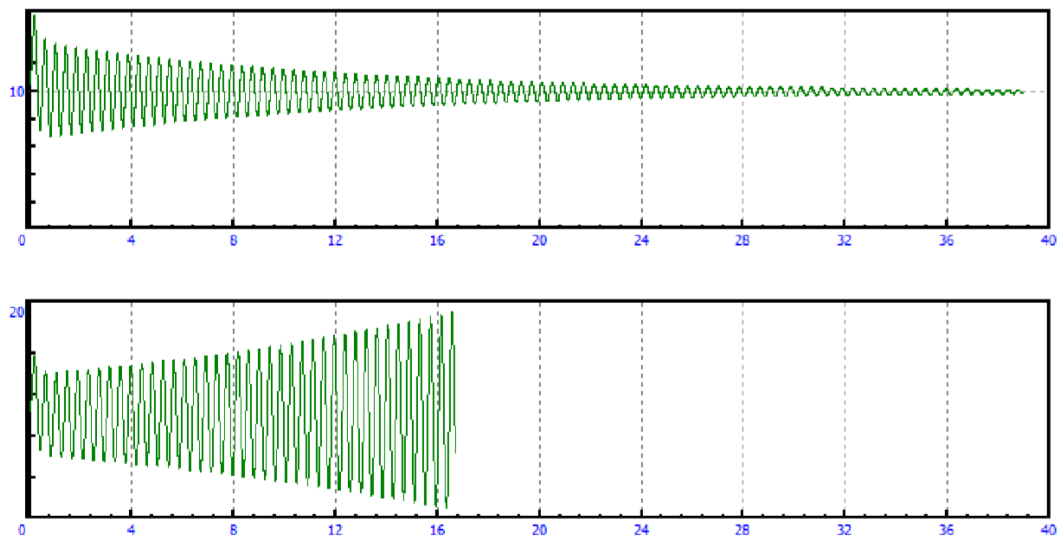


图 8 稳定悬浮和不稳定悬浮

## 参考文献

德米特里·波戈列洛夫, 雷强, 根纳季·米克希夫, & 亚历山大·罗迪科夫. (2019). 基于 UM 的磁浮列车-轨道梁耦合振动仿真程序开发. *计算机辅助工程*, 28(01), 34-41.